Segundo examen parcial (35%)

1. Resuelva los siguientes límites:

$$(\boldsymbol{a})\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan(x)}{\cos(x)-\sin(x)} \qquad (\boldsymbol{b})\ \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} \qquad (\boldsymbol{c})\ \lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x^2-4} \qquad (\boldsymbol{d})\ \lim_{x\to 0} \frac{x^4+x^3+x}{x^2-2x}$$

2. Demuestre que la ecuación $x + 2\cos(x) = 0$ tiene al menos una solución real.

3. Encuentre los valores de las constantes m y b para las cuales la función:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & si\ x < \pi \\ mx + b, & si\ x \geq \pi \end{cases}$$

- Sea continua en $x = \pi$.
- Sea derivable en $x = \pi$.

4. Demuestre, usando la definición de límite, que:

$$\lim_{x\to 5} \sqrt{x+4} = 3$$

Soluciones

1.Resuelva los límites

$$\textbf{(a)} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan(x)}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}$$

Si se evalua el límite:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan(x)}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)} = \frac{1-\tan(\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\pi}{4})-\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4})} = \frac{1-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{0}{0}$$

Ya que tenemos indeterminación $\frac{0}{0}$, manipulamos algebraicamente para hallar el límite.

Expandimos $\tan(x)$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan(x)}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)}$$

Sustituyendo

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\textbf{(b)} \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$$

Si evaluamos el límite...

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \frac{\sqrt{(-\infty)^2+1}}{-\infty+1} = -\frac{\infty}{\infty}$$

Ya que tenemos una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, manipulamos algebraicamente para hallar el límite.

Dividimos entre la x de mayor grado (en este caso x):

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}$$

Recordando que $\sqrt{x^2} = |x|$, y cuando evaluamos por debajo de 0, $|x|$ se define como $-x$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}$$

Evaluando:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{-\infty^2}}}{1+\frac{1}{-\infty}} = \frac{-\sqrt{1+0}}{1+0} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\textbf{(c)} \lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x^2-4}$$

Evaluamos el límite:

$$\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x^2-4} = \frac{|2-2|}{2^2-4} = \frac{0}{0}$$

Ya que tenemos indeterminación $\frac{0}{0}$, manipulamos algebraicamente para hallar el límite.

Definimos el valor absoluto:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{, si } x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{, si } x < 2 \end{cases}$$

Tenemos que evaluar el límite tanto por la derecha como por la izquierda:

Por la derecha:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)}$$
$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x+2}$$

Sustituyendo:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

Por la izquierda:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$
$$= \lim_{x\to 2^-} -\frac{1}{x+2}$$

Sustituyendo:

$$\lim_{x\to 2^-} -\frac{1}{x+2} = -\frac{1}{2+2} = -\frac{1}{4}$$

Como $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$, podemos afirmar que el límite no existe.

$$\textbf{(d)} \lim_{x\to 0} \frac{x^4+x^3+x}{x^2-2x}$$

Si evaluamos el límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4+x^3+x}{x^2-2x} = \frac{0^4+0^3+0}{0^2-2(0)} = \frac{0}{0}$$

Ya que tenemos indeterminación $\frac{0}{0}$, manipulamos algebraicamente para hallar el límite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(x^3+x^2+1)}{x(x-2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+x^2+1}{x-2}$$

Evaluando:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3+x^2+1}{x-2} = \frac{0^3+0^2+1}{0-2} = -\frac{1}{2}$$

---

2 . Demuestre que la ecuación $x + 2\cos(x) = 0$ tiene al menos una solución real

Comenzamos definiendo $f(x) = x + 2\cos(x)$.

Si evaluamos $f(2)$:

$$f(2) = 0 + 2\cos(0) = 0 + 2(1) = 2$$

Si evaluamos $f(-\frac{\pi}{2})$:

$$f(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} + 2\cos(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} + 2(0) = -\frac{\pi}{2}$$

Tanto x como $2cos(x)$ son funciones continuas, y la suma de dos funciones continuas crea otra función continua.

Entonces, como $0 \in [-\frac{\pi}{2}, 2]$, queda demostrado, por el Teorema del Valor Medio de la Función, que existe

$x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, tal que cumpla $x + 2\cos(x) = 0$.

---

3. Encuentre los valores de las constantes m y b para las cuales la funcion:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & , \text{si } x < \pi \\ mx + b & , \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

- Sea continua en $x = \pi$
- Sea derivable en $x = \pi$

Para que f(x) sea continua en $x = \pi$, $\lim\limits_{x \to \pi} f(x) = f(\pi)$

$$\lim_{x \to \pi^+} f(x) = \lim_{x \to \pi^-} f(x) = f(\pi) \Rightarrow \pi m + b = \operatorname{sen}(\pi) = \pi m + b \Rightarrow \pi m + b = 0$$

Para que la función sea derivable en $x = \pi$, $f'(\pi)^+ = f'(\pi)^-$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h} \Rightarrow$$
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{m(\pi+h)-b-(m\pi-b)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}(\pi+h)-\operatorname{sen}(\pi)}{h} \Rightarrow$$
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{m\pi+mh-b-m\pi+b}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}(\pi)\cos(h)+\cos(\pi)\operatorname{sen}(h)-0}{h} \Rightarrow$$
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{mh}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{(0)\cos(h)+(-1)\operatorname{sen}(h)}{h} \Rightarrow$$
$$\lim_{h\to 0^+} m = -\underbrace{\lim_{h\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}}_{\text{Límite notable}} \Rightarrow$$
$$m = -1$$

Sustituyendo la nueva variable en la primera ecuación:

$$\pi(-1)+b=0 \Rightarrow b=\pi$$

Entonces para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x=\pi$, $m=-1$ y $b=\pi$.

4- Demuestre usando la definición de límite:

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{x+4}=3$$

Para todo $\epsilon>0$, hay un $\delta>0$, tal que:

$$0<|x-5|<\delta \Longrightarrow |f(x)-3|<\epsilon$$

$$|\sqrt{x+4}-3|<\epsilon \Rightarrow$$

Multiplicamos por la conjugada:

$$\left|(\sqrt{x+4}-3)\left(\frac{\sqrt{x+4}+3}{\sqrt{x+4}+3}\right)\right| < \epsilon \Rightarrow$$
$$\left|\frac{x+4-9}{\sqrt{x+4}+3}\right| < \epsilon \Rightarrow$$

$\sqrt{x+4}$ siempre es positivo y está en el denominador, por lo que hace la expresión menor o igual para todo x. Por ende, si lo quitamos, obtendremos una expresión mayor o igual para todo x:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x+5}{\sqrt{x+4}+3}\right| \leq \left|\frac{x+5}{3}\right| &< \epsilon \Rightarrow \\
|x+5| &< 3\epsilon \Rightarrow \\
\delta &< 3\epsilon
\end{aligned}$$

Basta tomar un 3ϵ para demostrar que el límite existe y vale 3.

Este material fue digitalizado por Jean Franco Gómez para GUIAS USB.

Jean Franco Gómez

15-10581

Ingeniería de la Computación

Twitter: @JeanFranGo

gecousb.com.ve

Twitter: @gecousb

Instagram: gecousb

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección

gecousb@gmail.com